PRIMER EXAMEN PARCIAL DE MÉTODOS MATEMÁTICOS I

GRUPO: 1ºB.
(21-12-2020)

Inicial del 1er apellido

APELLIDOS...

NOMBRE...

(Cada problema vale 2 puntos)

1. Resuelve la siguiente inecuación y averigua si el conjunto solución tiene supremo y/o máximo.

$$|x^2 - 2x| - x < 0$$

2. Calcula:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n \right) \cdot \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n} \right) \right]$$

3. Estudia el carácter de la siguiente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n+2)}$$

4. Dada la siguiente serie, averigua si es convergente y si lo es calcula su suma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n+1}}$$

5. Dada la función $f(x) = \dfrac{3x+5}{x-2}$, determina, si es posible, su función inversa f^{-1} y $Dom(f^{-1})$. Compueba tu respuesta.

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS		
NOMBRE	D.N.I. n.º	
ASIGNATURA		GRUPO
CURSO	N.º DE MATRICULA	FECHA

PROB. 1 $\quad |x^2-2x|-x<0$

$$|x^2-2x|-x=\begin{cases} x^2-2x-x & \overbrace{x^2-2x}^{x(x-2)}\geq 0 \\ 2x-x^2-x & x^2-2x<0 \end{cases}$$

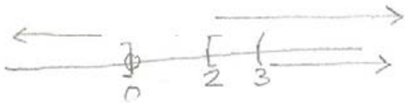
$$|x^2-2x|-x=\begin{cases} x^2-3x & x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty) \\ -x^2+x & x\in(0,2) \end{cases}$$

¿ $x^2-3x<0$? $\quad x(x-3)<0$

$x\in(-\infty,0]\cup[2,\infty)$

$x>0$, $x-3>0$: $x>3$ (!!)

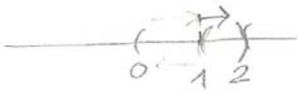
$\left.\begin{array}{l} 2<x \wedge x-3<0 \\ x<3 \end{array}\right\}$ $[2,3)$



¿ $-x^2+x<0$? $\quad x(-x+1)<0$

$x>0$, $-x+1<0$

$x\in(0,2)$ $\quad 1<x$



$\boxed{(1,2)}$

Sol: $[2,3)\cup(1,2)=\boxed{(1,3)}$

$A=(1,3)\quad \sup(A)=3\quad \nexists\ \max(A)$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

PROB. 2

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\overbrace{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)}^{(\infty-\infty)\ \text{ind.}}\cdot\overbrace{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)}^{\infty}\Big]=$$

$$=\lim_n \frac{\left[\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-n\right)\left(\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+n\right)\right]}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)=$$

$$=\lim_n \frac{n^2+\sqrt{n}-n^2}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)=\lim_n \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{2n}\right)=$$

$$=\lim_n \frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{2n^2}}{\sqrt{n^2-\sqrt{n}}+\sqrt{n}}=\lim_n \frac{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}+\frac{n}{n^2}}+\sqrt{\frac{2n^2}{n^2}}}{\sqrt{\frac{n^2}{n^2}-\frac{\sqrt{n}}{n^2}}+\sqrt{\frac{n}{n^2}}}=$$

$$=\lim_n \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{2}}{\sqrt{1-\sqrt{\frac{1}{n^3}}}+\sqrt{\frac{1}{n}}}=\boxed{1+\sqrt{2}}$$

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
DE MADRID

Ejercicios del ALUMNO

APELLIDOS ....

NOMBRE D.N.I. n.º

ASIGNATURA .... GRUPO ....

CURSO N.º DE MATRICULA FECHA

PROB. 3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}$

Crit. del cociente.

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)\,(2n+4)}}{\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}} =$$

$= \lim_n \dfrac{(2n+1)}{(2n+4)} = 1$ el crit. del coc no decide

Crit. de Raabe

$$\lim_n \left[n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right] = \lim_n \left[n\left(1-\frac{2n+1}{2n+4}\right)\right] =$$

$$= \lim_n \left[n\left(\frac{2n+4-2n-1}{2n+4}\right)\right] = \lim_n \left[\frac{3n}{2n+4}\right] = \boxed{\frac{3}{2}} > 1$$

Luego, la serie dada converge

PROB. 4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{5^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{2}{5}\right)^n \cdot \frac{1}{5}\right] = \frac{1}{5} \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n}$

progresión geom. de

$r = -\frac{2}{5}$

$|r| < 1$ la serie dada converge

$$\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{5}\,\frac{-2/5}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{1}{5}\,\frac{-2/5}{1+\frac{2}{5}} = \frac{1}{5}\,\frac{-2/5}{7/5} = \frac{-2\cdot 5}{7\cdot 5\cdot 5} = \boxed{\frac{-2}{35}}$$

PROB. 5 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1+5}{x_1-2} = \frac{3x_2+5}{x_2-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3x_1x_2 - 6x_1 + 5x_2 - 10 = 3x_2x_1 - 6x_2 + 5x_1 - 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow -6x_1 - 5x_1 = -6x_2 - 5x_2 \Rightarrow -11x_1 = -11x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

f es inyectiva, luego $\exists f^{-1}$

$y = \frac{3x+5}{x-2} \Rightarrow yx - 2y = 3x+5 \Rightarrow x(y-3) = 5+2y \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{5+2y}{y-3}$; $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{5+2x}{x-3}}$

$Dom(f^{-1}) = \mathbb{R} - \{3\} = Im(f)$

$Dom(f) = \mathbb{R} - \{-2\} = Im(f^{-1})$

$$(f^{-1}\circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{3x+5}{x-2}\right) = \frac{5+2\,\frac{3x+5}{x-2}}{\frac{3x+5}{x-2}-3} =$$

$$= \frac{(5x-10+6x+10)(x-2)}{(x-2)(3x+5-3x+6)} = \frac{11x}{11} = x$$